הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

משוואות דיפרנציאליות רגילות ח' 104131

פתרון מועד א סמסטר חורף תשע"ב 21.2.2012

<u>שאלה 1</u> (15 נקודות)

נתון כי המשוואה $\left(\left(1+x-y\right)e^{x}+Ax\sin\left(2y\right)\right)dx+\left(Be^{x}+2x^{2}\cos\left(2y\right)\right)dy=0$

הינה מדויקת (A,B מספרים קבועים).

א) מצאו את A,B. עבור הקבועים שמצאתם, רשמו את כל הפתרונות למשוואה אשר מקיימים את התנאי $y(0)=\pi$ (ניתן לרשום את התשובה בצורת פונקציה סתומה).

ב) האם קיים יותר מפתרון אחד לבעיית ההתחלה בסעיף ב' ? נמקו את תשובתכם ע"י שימוש במשפט קיום ויחידות.

<u>פתרון:</u>

א) המשוואה מדויקת אם

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+x-y\right)e^{x}+Ax\sin\left(2y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(Be^{x}+2x^{2}\cos\left(2y\right)\right)$$

$$-e^{x}+2Ax\cos(2y)=Be^{x}+4x\cos(2y)$$

הקבועים: $A=2,\quad B=-1$.

הפתרון מקיים:

$$\psi(x,y)=\int\left(\left(1+x-y\right)e^{x}+2x\sin\left(2y\right)\right)dx=$$

$$=(x-y)e^{x}+x^{2}\sin(2y)+c(y)$$

מצד שני:

$$\psi_{y}(x,y)=-e^{x}+2x^{2}\cos(2y)+c'(y)=-e^{x}+2x^{2}\cos\left(2y\right)$$

לכן $c'(y)=0$ או $c(y)=const$.

הפתרון הכללי בצורת פונקציה סתומה: $(x-y)e^{x}+x^{2}\sin(2y)=c$.

הפתרון המקיים את התנאי הנתון מקיים:

$$(0-\pi)e^{0}+0^{2}\sin(2\pi)=c\quad\Rightarrow\quad c=-\pi$$

הפתרון הפרטי למד"ר + תנאי:

$(x-y)e^{x}+x^{2}\sin(2y)+\pi=0$.

ב) כדי לבדוק את תנאי משפט הקיום והיחידות נציג את המשוואה בצורה מנורמלת:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(1+x-y\right)e^{x}+2x\sin\left(2y\right)}{-e^{x}+2x^{2}\cos\left(2y\right)}=f(x,y).$$

כיוון שהמד"ר לא לינארית, למשוואה מובטח קיום פתרון יחיד אם:

$f(x,y),\quad f_{y}(x,y)$ רציפות בסביבת נקודת ההתחלה: $\left(0,\pi\right)$.

$$f(x,y)=\frac{(1+x-y)e^x+2x\sin(2y)}{-e^x+2x^2\cos(2y)},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\left(-e^x+4x\cos(2y)\right)\cdot\left(-e^x+2x^2\cos(2y)\right)}{\left((1+x-y)e^x+2x\sin(2y)\right)^2}$$

$$\frac{\left(4x^2\sin(2y)\right)\cdot\left((1+x-y)e^x+2x\sin(2y)\right)}{\left(-e^x+2x^2\cos(2y)\right)^2}$$

כיוון ששתי הפונקציות בנויות מפונקציות אלמנטריות, ובנקודה הנתונה המכנה לא מתאפס הפונקציות רציפות בנקודה הנתונה ובסביבתה, ולכן לבעיה קיים פתרון יחיד.

<u>שאלה 2</u> (20 נקודות)

א) בדקו כי הפונקציה $y_1(x)=e^x$ הינה פתרון למשוואה $(1-2x)y''+2y'+(2x-3)y=0$.

ב) מצאו את הפתרון הכללי למשוואה $(1-2x)y''+2y'+(2x-3)y=0$.

ג) נתון כי $x_0\neq 0$. נתון כי הפונקציה $u(x)$ היא כך ש- $(1-2x)u''+2u'+(2x-3)u=0$, $u(x_0)=0,\quad u'(x_0)=0$ ו- $u(0)=1$.

מצאו את הנקודה x_0 ואת הפונקציה $u(x)$.

<u>פתרון:</u>

א) ע"י הצבה:

$$(1-2x)y''+2y'+(2x-3)y=(1-2x)e^x+2e^x+(2x-3)e^x=0.$$

ב) נחפש פתרון נוסף מהצורה $y(x)=v(x)e^x$. נגזור:

$$y'(x)=\left(v'(x)+v(x)\right)e^x,\quad y''(x)=\left(2v''(x)+v'(x)+v(x)\right)e^x$$

נציב במד"ר:

$$\begin{aligned}0&=(1-2x)y''+2y'+(2x-3)y=\\&=(1-2x)\left(v''+2v'+v\right)e^x+2\left(v'+v\right)e^x+(2x-3)ve^x=\\&=\left(v''(1-2x)+v'(2-4x+2)+v(1-2x+2+2x-3)\right)e^x=\\&=\left(v''(1-2x)+v'(4-4x)\right)e^x\end{aligned}$$

נסמן $z(x)=v'(x)$ ונקבל מד"ר מסדר ראשון: $z'(1-2x)+z(4-4x)=0$

ע"י הפרדת משתנים:

פתרון סינגולרי $z(x)\equiv 0$ ומשוואה:

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{4x-4}{1-2x}dx \quad\Rightarrow$$

$$\ln|z|=-2\int\frac{2-2x}{1-2x}dx=-2\int\frac{1-2x+1}{1-2x}dx=-2\int 1+\frac{1}{1-2x}dx=$$

$$=-2\left(x+\frac{\ln|1-2x|}{-2}\right)+\tilde{c}=-2x+\ln|1-2x|+\tilde{c} \quad\Rightarrow$$

$$|z|=e^{\tilde{c}}e^{-2x}|1-2x| \quad\Rightarrow\quad z=ce^{-2x}(1-2x)$$

(פתרון זה כולל בתוכו את הפתרון הסינגולרי.

נחזור למשתנה המקורי:

$$v'=ce^{-2x}(1-2x) \quad\Rightarrow$$

$$v=\int ce^{-2x}(1-2x)dx=$$

$$=c\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\cdot(1-2x)-\int\frac{e^{-2x}}{-2}\cdot(-2)dx\right)=$$

$$=c\left(\frac{(1-2x)e^{-2x}}{-2}-\frac{e^{-2x}}{-2}\right)+d=$$

$$=cxe^{-2x}+d$$

והפתרון למד"ר: $y=ve^{x}=cxe^{-x}+de^{x}$.

ג) מהתנאי השלישי: $1=u(0)=c\cdot 0\cdot e^{0}+de^{0}=d \quad\Leftarrow\quad d=1$

מתנאי ההתחלה הראשון:

$$0=u(x_0)=cx_0e^{-x_0}+de^{x_0} \quad\Leftarrow\quad cx_0e^{-x_0}+e^{x_0}=0 \quad\Leftarrow\quad c=-\frac{e^{2x_0}}{x_0}$$

מתנאי ההתחלה השני: $0=y'(x_0)=c\left(e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}\right)+de^{x_0}$

$$\Leftarrow\quad -\frac{e^{2x_0}}{x_0}\left(e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}\right)+e^{x_0}=0 \quad\Leftarrow\quad -\frac{e^{x_0}}{x_0}+e^{x_0}+e^{x_0}=0$$

$\Leftarrow\quad -\frac{1}{x_0}+2=0 \quad\Leftarrow$ הנקודה: $x_0=\frac{1}{2}$.

הקבועים: $d=1,\quad c=-\frac{e^{1}}{\frac{1}{2}}=-2e$ והפונקציה: $u=-2xe^{-x+1}+e^{x}$.

<u>הערה:</u> ניתן לראות מיד כי $x_0=\frac{1}{2}$ כיוון שבכל נקודה אחרת תנאי משפט קיום ויחידות מתקיימים, והפתרון היחיד שמקיים $u(x_0)=0,\quad u'(x_0)=0$ הוא $u(x)\equiv 0$

<u>שאלה 3</u> (20 נקודות)

א) יהי $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

נתון כי כל הפתרונות למערכת המשואות $\vec{x}'=\begin{pmatrix} m & -2 \\ 2 & m \end{pmatrix}\vec{x}$ מקיימים $\vec{x}(0)=\vec{x}(\pi)$.

מצאו את m , ורשמו פתרון כללי למערכת הנתונה.

ב) עבור m שמצאתם בסעיף א' מצאו את כל הפתרונות למערכת המשוואות

$\vec{x}'=\begin{pmatrix} m & -2 \\ 2 & m \end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ 4\sin 2t \end{pmatrix}$ אשר מקיימים את התנאי $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

א) הע"ע מקיימים: $0=\begin{vmatrix} m-r & -2 \\ 2 & m-r \end{vmatrix}=r^2-2mr+m^2+4=$

כלומר: $r_{1,2}=\dfrac{2m\pm\sqrt{4m^2-4(m^2+4)}}{2}=\dfrac{2m\pm 4i}{2}=m\pm 2i$

נבחר ע"ע $r=m+2i$ ונחפש ו"ע, נפתור:

$$\begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נקבל משוואה: $-2ix_1-2x_2=0$ הפתרון: $x_2=-ix_1$

מתקבל ו"ע: $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ופתרון:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{(m+2i)t}=e^{mt}\begin{pmatrix} \cos(2t)+i\sin(2t) \\ -i\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right) \end{pmatrix}=$$

$$=e^{mt}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}+ie^{mt}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

ובהצגה ממשית:

$$\vec{x}=ae^{mt}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}+be^{mt}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

מהנתון: $\vec{x}(0)=\vec{x}(\pi)$ לכן:

$$ae^0\begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2\pi) \end{pmatrix}+be^0\begin{pmatrix} \sin(2\pi) \\ -\cos(2\pi) \end{pmatrix}=ae^{m\pi}\begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2\pi) \end{pmatrix}+be^{m\pi}\begin{pmatrix} \sin(2\pi) \\ -\cos(2\pi) \end{pmatrix}$$

לכן: $e^{m\pi}=e^0$ כלומר: $m=0$.

הפתרון הכללי: $\vec{x}(t)=a\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$

ב) ניתן להציג את הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית ע"י:

$$\vec{x}_H(t)=\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

פתרון פרטי למערכת האי הומוגנית יהיה מהצורה:

$$\vec{x}_P(t)=\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}.$$

ע"י גזירה והצבה במערכת הנתונה:

$$\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}'=$$

$$=\begin{pmatrix}m & -2\\ 2 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 4\sin 2t\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0\\ 4\sin 2t\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 4\sin 2t\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}'=\frac{1}{-\cos^2(2t)-\sin^2(2t)}\begin{pmatrix}-\cos(2t) & -\sin(2t)\\ -\sin(2t) & \cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4\sin 2t\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}'=-\begin{pmatrix}-4\sin^2(2t)\\ 4\sin(2t)\cos(2t)\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int 2-2\cos(4t)dt\\ -\int 2\sin(4t)dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-\frac{1}{2}\sin(4t)\\ \frac{1}{2}\cos(4t)\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

הפתרון הפרטי למערכת האי הומוגנית:

$$\vec{x}_P(t)=\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t-\frac{1}{2}\sin(4t)\\ \frac{1}{2}\cos(4t)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left(2t-\frac{1}{2}\sin(4t)\right)\cos(2t)+\frac{1}{2}\cos(4t)\sin(2t)\\ \left(2t-\frac{1}{2}\sin(4t)\right)\sin(2t)-\frac{1}{2}\cos(4t)\cos(2t)\end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי למערכת האי-הומוגנית:

$$\vec{x}(t)=a\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\sin(2t)\\ -\cos(2t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(2t-\frac{1}{2}\sin(4t)\right)\cos(2t)+\frac{1}{2}\cos(4t)\sin(2t)\\ \left(2t-\frac{1}{2}\sin(4t)\right)\sin(2t)-\frac{1}{2}\cos(4t)\cos(2t)\end{pmatrix}$$

נציב את התנאי:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\vec{x}(0)=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

מהרכיב הראשון $a=0$ ומהרכיב השני: $b=-\frac{1}{2}$

ולכן הפתרון: $\vec{x}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(4t-\sin(4t))\cos(2t)+\cos(4t)\sin(2t)\\ (4t-\sin(4t))\sin(2t)-\cos(4t)\cos(2t)\end{pmatrix}$

<u>שאלה 4</u> (15 נקודות)

נתון כי $y_1(t),y_2(t)$ פתרונות פרטיים למשוואה $y''+4y'+8y=g(t)$

כאשר $g(t)$ רציפה ב-R.

א) סמנו $y_P(t)$ פתרון פרטי למד"ר האי-הומוגנית, ורשמו פתרון כללי הכולל ביטוי זה.

ב) הוכיחו כי $\left(y_1(t)-y_2(t)\right)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$.

ג) נתון כי $y_1(0)=y_2(0)$. הראו כי $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>פתרון</u>

א) הפתרון למשוואה ההומוגנית:

ע"ע $r_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}=-2\pm 2i$

פתרון כללי להומוגנית: $y_H(x)=e^{-2t}\left(Acos(2t)+B\sin(2t)\right)$

נסמן פתרון פרטי מסויים לאי הומוגנית ע"י: $y_P(t)$,

פתרון כללי למד"ר: $y(t)=e^{-2t}\left(Acos(2t)+B\sin 2t)\right)+y_P(t)$.

ב) כיוון ש $y_1(t),y_2(t)$ פתרונות למד"ר, ניתן להציגם ע"י:

$$y_1(t)=e^{-2t}\left(A_1cos(2t)+B_1\sin(2t)\right)+y_P(t)$$

$$y_2(t)=e^{-2t}\left(A_2cos(2t)+B_2\sin(2t)\right)+y_P(t)$$

וההפרש בינהם:

$$y_1(t)-y_2(t)=e^{-2t}\left((A_1-A_2)cos(2t)+(B_1-B_2)\sin(2t)\right)$$

ולכן:

$$\left|y_1(t)-y_2(t)\right|=e^{-2t}\left(\left|A_1-A_2\right|+\left|B_1-B_2\right|\right)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$$

ומקבלים: $\left(y_1(t)-y_2(t)\right)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$.

ג) נתון $y_1(0)=y_2(0)$, ולכן $\left(y_1(0)-y_2(0)\right)=0$

כלומר:

$$0=y_1(0)-y_2(0)=e^0\left((A_1-A_2)cos(0)+(B_1-B_2)\sin(0)\right)=(A_1-A_2)$$

כלומר עבור הפתרונות הנתונים:

$$y_1(t)-y_2(t)=e^{-2t}(B_1-B_2)\sin(2t)$$

ולכן: $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)-y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\pi}(B_1-B_2)\sin\pi=0$ כלומר: $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>שאלה 5</u> (15 נקודות)

פתרו את בעיית ההתחלה $x^2y''+xy'+9y=12\sin(3\ln x)$,

$\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$ ומצאו את תחום הגדרת הפתרון.

<u>פתרון:</u>

זו משוואת אוילר: נציב $t=\ln x$ ונסמן: $v(t)=y(x)$,

נגזור: $y'(x)=v'(x)\cdot\frac{1}{x},\quad y''(x)=v''(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2-v'(x)\cdot\frac{1}{x^2}$

נקבל מד"ר : $x^2\left(v''(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2-v'(x)\cdot\frac{1}{x^2}\right)+x\left(v'(x)\cdot\frac{1}{x}\right)+9v(x)=12\sin(3t)$.

התנאים: $v(\ln 1)=0,\quad \frac{1}{1}v'(\ln 1)=0$

מקבלים בעיית התחלה: המד"ר $v''+9v=12\sin(3t)$ והתנאים: $v(0)=0,\quad v'(0)=0$.

הע"ע מקימים $r^2+9=0$ לכן $r_{1,2}=\pm 3i$

הפתרון הכללי להומוגנית: $v(t)=A\sin(3t)+B\cos(3t)$.

נחפש פתרון כללי לאי הומוגנית מהצורה: $v_P(t)=t\left(A\sin(3t)+B\cos(3t)\right)$

נגזור: $v'_P(t)=\left(A\sin(3t)+B\cos(3t)\right)+t\left(3A\cos(3t)-3B\sin(3t)\right)$

$$v''_P(t)=2\left(3A\cos(3t)-3B\sin(3t)\right)+t\left(-9A\sin(3t)-9B\cos(3t)\right)$$

נציב:

$$2\left(3A\cos(3t)-3B\sin(3t)\right)+t\left(-9A\sin(3t)-9B\cos(3t)\right)+$$
$$+9\left(t\left(A\sin(3t)+B\cos(3t)\right)\right)=12\sin(3t)$$

קיבלנו $2\left(3A\cos(3t)-3B\sin(3t)\right)=12\sin(3t)$ נקבל: $A=0,\quad B=-2$.

הפתרון לאי הומוגנית: $v_P(t)=-2t\cos(3t)$.

הפתרון הכללי למד"ר: $v(t)=A\sin(3t)+B\cos(3t)-2t\cos(3t)$.

מהתנאי הראשון: $v(0)=A\sin(0)+B\cos(0)-2\cdot 0\cos(0)=B$

לכן $B=0 \quad\Leftarrow\quad v(t)=A\sin(3t)-2t\cos(3t)$

מהתנאי השני:

$$v'(t) = 3A\cos(3t) - 2\cos(3t) + 6t\sin(3t)$$
$$0 = v'(0) = 3A\cos(0) - 2\cos(0) + 6\cdot 0\sin(0) = 3A - 2$$

לכן $A = \frac{2}{3} \quad \Leftarrow \quad v(t) = \frac{2}{3}\sin(3t) - 2t\cos(3t)$

במשתנים המקוריים: $y(x) = \frac{2}{3}\sin(3\ln x) - 2\ln x\cos(3\ln x)$.

<u>שאלה 6</u> (15 נקודות)

נתונה מערכת של משוואות ליניאריות:

א) יש למצוא פתרון כללי למערכת.

ב) צירו סקיצה של מישור הפאזה, אפינו את הנקודה הקריטית וקבעו האם המערכת יציבה.

<u>פתרון</u>

א) המערכת: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

הפולינום האופיני: $0 = \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 9 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 1 - 9$

הע"ע: $r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = -2, 4$

ו"ע עבור $r = -2$ הוא פתרון המערכת: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

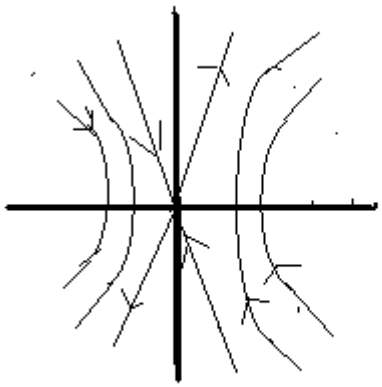
כלומר $3x + y = 0$ למשל: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, מקבלים פתרון: $e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

ו"ע עבור $r = 4$ הוא פתרון המערכת: $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

כלומר $-3x + y = 0$ למשל: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, מקבלים פתרון: $e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

פתרון כללי למערכת: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Ae^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + Be^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

ב) מישור הפאזה



הנקודה הקריטית היא מסוג אוכף. המערכת איננה יציבה.

בהצלחה!